פתרון מבחני עבר — משוואות דיפרנציאליות

14 ביולי 2026

תוכן עניינים

1 מועד א' 2021 4
1.1 שאלה 1 4
1.1.1 סעיף א' 4
1.1.2 סעיף ב' 4
1.2 שאלה 2 5
1.3 שאלה 3 5
1.3.1 סעיף א' 5
1.3.2 סעיף ב' 5
1.3.3 סעיף ג' 5
1.4 שאלה 4 6
1.4.1 סעיף א' 6
1.4.2 סעיף ב' 6
1.4.3 סעיף ג' 6
1.5 שאלה 5 6
2 מועד א' 2022 7
2.1 שאלה 1 7
2.1.1 סעיף א' 7
2.1.2 סעיף ב' 7
2.1.3 סעיף ג' 7
2.2 שאלה 2 8
2.3 שאלה 3 9
2.3.1 סעיף א' 9
2.3.2 סעיף ב' 9
2.4 שאלה 4 9
2.4.1 סעיף א' 9
2.4.2 סעיף ב' 10
2.5 שאלה 5 10
3 מועד ב' 2022 11
3.1 שאלה 1 11
3.1.1 סעיף א' 11
3.1.2 סעיף ב' 11
3.2 שאלה 2 11
3.2.1 סעיף א' 11
3.2.2 סעיף ב' 11
3.3 שאלה 3 12
3.3.1 סעיף א' 12
3.3.2 סעיף ב' 12
3.3.3 סעיף ג' 13
3.4 שאלה 4 13
3.4.1 סעיף א' 13
3.4.2 סעיף ב' 13
3.4.3 סעיף ג' 13
3.5 שאלה 5 14
4 מועד א' 2024 15
4.1 שאלה 1 15
4.2 שאלה 2 15
4.3 שאלה 3 16
4.4 סעיף א' 16
4.5 סעיף ב' 16
4.6 שאלה 4 17
4.7 שאלה 5 17
5 מועד ב' 2024 18
5.1 שאלה 1 18
5.2 שאלה 2 18
5.2.1 סעיף א' 18
5.2.2 סעיף ב' 19

5.3 שאלה 3 19
5.3.1 סעיף א' 19
5.3.2 סעיף ב' 19
5.4 שאלה 4 20
5.5 שאלה 5 20

1 מועד א' 2021

1.1 שאלה 1

סעיף א'

נמצא את הפיתרון לבעיית תנאי ההתחלה

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

כאשר $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ו־ $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

הוכחה: זו משוואה הומגנית אז מספיק לחשב את $x(t) = e^{tA}x_0$.

נמצא ערכים עצמיים

$$P(A) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} 4-\lambda & 4 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)(2-\lambda)$$

כלומר $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$ הם ערכים עצמיים של המטריצה ונמצא וקטורים עצמיים

$$\begin{pmatrix} 4-2 & 4 \\ 0 & 2-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \iff 2a + 4b = 0$$

אז וקטור עצמי לדוגמה הוא $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ בשביל הערך העצמי $\lambda_1 = 2$.

$$\begin{pmatrix} 4-4 & 4 \\ 0 & 2-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \iff 4b - 2b = 0 \iff b = 0$$

ואז הוקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי שמתאים לערך העצמי $\lambda_2 = 4$. P תהיה המטריצה המלכסנת והמטריצה האלכסונית D תהיה

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ונשאר לחשב את e^{tA} אז

$$e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4t} & 2e^{4t} - 2e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

ולכן

$$x(t) = e^{tA}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4t} & 2e^{4t} - 2e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5e^{4t} - 4e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

נשאר לבדוק

$$x(0) = \begin{pmatrix} 5e^{4\cdot 0} - 4e^{2\cdot 0} \\ 2e^{2\cdot 0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = x_0$$

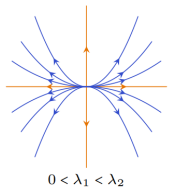
$$x'(t) = \begin{pmatrix} 20e^{4t} - 8e^{2t} \\ 4e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$Ax(t) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5e^{4t} - 4e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20e^{4t} - 16e^{2t} + 8e^{2t} \\ 4e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20e^{4t} - 8e^{2t} \\ 4e^{2t} \end{pmatrix} = x'(t)$$

□

סעיף ב'

הדיאגרמת פאזה המתאימה היינה



$0 < \lambda_1 < \lambda_2$

1.2 שאלה 2

נוכיח את החלק הבא ממשפט תלות רציפה בתנאי התחלה: תהיי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ותהיי $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ליפשיצית מקומית ונסמן ב־$\varphi_t(x)$ את הזרימה עבור המשוואה הדיפרנציאלית $x'(t) = F(x(t))$. תהיי $x_0 \in \Omega$ ונניח שעבור $t_0 > 0$ כלשהו $\varphi_{t_0}(x)$ מוגדר.
נוכיח כי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שאם $\|y_0 - x_0\| < \delta$ אז $\varphi_{t_0}(y_0)$ מוגדר ומתקיים

$$\left\|\varphi_{t_0}(x_0) - \varphi_{t_0}(y_0)\right\| < \varepsilon$$

הוכחה: **מרגיש לי שזה לא הניסוח שאני יודעת לפתור אז לא.** □

1.3 שאלה 3

נביט במערכת המשוואות

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ -y(t) - \sin(x(t)) \end{pmatrix}$$

סעיף א'

נמצא את כל נקודות שיווי־המשקל של המערכת.
פתרון: נקודת שיווי משקל מתקבלת כאשר $F(x) = 0$ ולכן במקרה שלנו $y(t) = 0$ מה שקורה שגם $\sin(x(t)) = 0$ ולכן כל נקודות שיווי המשקל הן עבור $y(t) = 0$ ו־$x(t) = k\pi$ עבור $k \in \mathbb{Z}$. □

סעיף ב'

נראה כי $L(x, y) = -\cos(x) + \frac{y^2}{2}$ היא פוקנציית ליאפונוב עבור נקודת שיווי־המשקל $(0, 0)$ ונסיק שנקודה זו יציבה אסימפטוטית.
הוכחה: כדי להראות שזו פונקציית ליאפונוב עלינו להראות כי

$$\langle \nabla L(x), F(x) \rangle \leq 0$$

ואם נראה שזה ממש קטן מאפס נוכל להשתמש במשפט ליאפונוב ולקבל את היציבות האסימפטוטית.
אם־כך, נחשב

$$\nabla L(x) = \begin{pmatrix} \sin(x) \\ y \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\langle \nabla L(x), F(x) \rangle = \sin(x) \cdot y(t) + y(-y - \sin(x)) = -y^2$$

ואכן עבור הראשית מתקיים $\langle \nabla L(0), F(0) \rangle \leq 0$ וזו אכן פונקציית ליאפונוב אבל ממש לא חזקה.
אין לנו כלים אחרים לפתור את השאלה ולכן נסיק שיש טעות במבחן והכוונה לנקודת משקל יציבה (ואז היא אכן יציבה ממשפט ליאפונוב). □

סעיף ג'

יהי $(x(t), y(t))$ הפיתרון המקסימלי למערכת המתחיל בנקודה $(a, 0)$ עבור $a \in \mathbb{R}$.
נשתמש בפונקציית ליאפונוב L כדי להוכיח ש־$-2 \leq y(t) \leq 2$ לכל t בתחום הגדרה של הפיתרון.
הוכחה: לא ידעתי איך לפתור את זה.
אבל בגדול מהסעיף הקודם ניתן להסיק

$$L(x(t), y(t)) \leq L(x(0), y(0))$$

כי הנגזרת מהסעיף הקודם שלילית.
נתון $x(0) = a$ ו־$|y(0)| \leq 2$ אזי

$$L(x, 0) = -\cos(a) + \frac{0^2}{0} = -\cos(a)$$

אז

$$-\cos(x(t)) + \frac{y(t)^2}{2} \leq -\cos(a) \iff \frac{y(t)^2}{2} \leq \cos(x(t)) - \cos(a)$$

מתכונות קוסינוס

$$\cos(x(t)) - \cos(a) \leq 1 - (-1) = 2$$

ולכן

$$\frac{y(t)^2}{2} \leq 2 \implies y(t)^2 \leq 4 \implies -2 \leq y(t) \leq 2$$

□

1.4 שאלה 4

יהי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום חסום.

סעיף א'

נגדיר $u \in C^0(\Omega)$ תת־הרמונית.

פתרון: נגיד ש־u היא תת־הרמונית אם לכל כדור פתוח $B = B(x_0, r)$ כך ש־$\overline{B} \subseteq \Omega$ ולכל פונקציה $h \in C\left(\overline{B}\right)$ שהרמונית ב־B המקיימת $u|_{\partial B} \leq h|_{\partial B}$ מתקיים $u|_B \leq h|_B$. □

סעיף ב'

תהיי $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ פונקציה חסומה ונגדיר את פתרון פרון לבעיית תנאי השפה

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{on } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

פתרון: פיתרון פרון הוא הפונקציה

$$u^{per} := \sup\left\{v \mid v \in C\left(\overline{\Omega}\right) \text{ sub-harmonic}, v|_{\partial\Omega} \leq g\right\}$$

□

סעיף ג'

מבקשים שנוכיח את משפט פרון.

אני לא זוכרת אותו בעל־פה, אז נדביק אותו מהסיכום ופשוט נזכור שצריך לעשות הרבה ההרמות וסנדוויץ ותתי־סדרות.

הוכחה: תהיי $y \in \Omega$ ולכן קיימת סדרה $v_n \in S_g$ כך ש־$v_n(y) \to u^{per}(y)$.

מעיקרון המקסימום מתקיים $v_n \leq \sup_{\partial\Omega} g$ ונגדיר $\tilde{v}_n := \max\{v_n, \inf_{\partial\Omega} g\}$ ומתקיים

$$\inf g \leq \tilde{v}_n \leq \sup g, \quad v_n(y) \leq \tilde{v}_n(y) \underset{\tilde{v}_n \in S_g}{\leq} u^{per}(y)$$

ומכלל הכריך נובע ש־$\tilde{v}_n(y) \to u^{per}(y)$ וזו סדרה של פונקציות חסומות ב־S_g.

יהי $B = B(y, r) \subseteq \Omega$ כך ש־$\overline{B} \subseteq \Omega$, נשים לב שההרמה ההרמונית היא תת־הרמונית ולכן $\tilde{v}_n \leq V_n$ ולכן $V_n \in S_g$ ונקבל את שרשרת אי־השיוויונות $\tilde{v}_n \leq V_n \leq u^{per}$ ולכן בנקודה y נקבל $V_n(y) \to u^{per}(y)$.

אז $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה חסומה של פונקציות הרמוניות בכדור B ומטענה שראינו לסדרת פונקציות הרמוניות חסומות קיימת תת־סדרה שמתכנסת לפונקציה תת־הרמונית, אז תת־סדרה V_{n_k} שמתכנסת ב־B לפונקציה הרמונית h_v כך שמתקיים $V_{n_k} \to h_v$ נקודתית ומיחידות הגבול $V_{n_k}(y) \to u^{per}(y)$ וכן $V_{n_k}(y) \to h_v(y)$.

נרצה להראות שזה מתקיים לכל נקודה ב־B: כבר ידוע $h_v \leq u^{per}$ ב־B ולכן נשאר להראות את האי־שיוויון השני; נניח בשלילה שקיימת $z \in B$ עבורה $h_v(z) < u^{per}(z)$.

תהיי $w_k \in S_g$ כך ש־$w_k \geq V_{n_k}$ ו־$w_k(z) \to u^{per}(z)$.

מהגדרת sup נקבל שקיימת סדרה $\hat{w}_k \in S_g$ המקיימת את התנאי השני ונחליף $w_k := \max\left\{\hat{w}_k, V_{n_k}\right\} \in S_g$ ומתקיים $V_{n_k} \leq w_k \leq u^{per}$ ובפרט $w_k(z) \to u^{per}(z)$ וכן $w_k(y) \to u^{per}(y)$.

ושוב עם ההרמה ההרמונית, $W_k \in S_g$ ומתקיים $V_{n_k} \leq w_k \leq W_k \leq u^{per}$ ונוכל למצוא תת־סדרה מתכנסת W_{k_n} ב־B לפונקציה הרמונית h_w ומתקיים

$$h_v \leq h_w, \quad h_v(y) = h_w(y) = u^{per}(y), \quad h_v(z) < h_w(z) = u^{per}(z)$$

לכן הפונקציה $h_v - h_w \leq 0$ היא פונקציה הרמונית שאינה קבועה ומקבלת מקסימום 0 בנקודה פנימית y בסתירה לעקרון המקסימום ולכן $h_v \equiv u^{per}$ ב־B.

משרירותיות B, y נקבל ש־u^{per} הרמונית ב־Ω. □

1.5 שאלה 5

לא למדנו.

2 מועד א' 2022

2.1 שאלה 1

סעיף א'

ננסח את המשפט שלמדנו בהרצאה לגבי רציפות ביחס לתנאי התחלה במשוואות דיפרנציאליות רגילות.

פתרון: תהיי $F : U \to \mathbb{R}^n$ ליפשיצית מקומית כאשר $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה. נגדיר

$$\Omega := \left\{(p,t) \mid p \in U, t \in J_p^*\right\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

לכל $(p,t) \in \Omega$ נגדיר את $\Phi(p,t) = x_p(t) = \varphi_t(p)$ היכן ש־$x_p(t)$ פיתרון ל־$x_p'(t) = F\big(x_p(t)\big)$ ו־$x_p(0) = p$.
תלות רציפה בתנאי התחלה אומר שהקבוצה Ω היא פתוחה ו־$\Phi : \Omega \to U$ היא רציפה. □

סעיף ב'

נמצא את הצורה הכללית לפיתרון ממשי למשוואה $x' = \begin{pmatrix} 1 & -13 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} x$.

פתרון: נסמן $A = \begin{pmatrix} 1 & -13 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ ונתחיל כרגיל מלמצוא ערכים עצמיים

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & -13 \\ 1 & -3-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(-3-\lambda) + 13 = \lambda^2 - 2\lambda + 10 \Longrightarrow \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-40}}{2} \Longrightarrow \lambda = -1 \pm 3i$$

ולכן יש זוג ערכים עצמיים מרוכבים, נמצא להם וקטורים עצמיים

$$\begin{pmatrix} 2-3i & -13 \\ 1 & -2-3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow a - (2+3i)b = 0 \Longleftrightarrow b = 1, a = 2+3i$$

כלומר $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.
מזהות אויילר הפתרונות הממשיים הם

$$e^{\alpha t}(u\sin(\beta t) + w\cos(\beta t)), \quad e^{\alpha t}(u\cos(\beta t) - w\sin(\beta t))$$

כאשר $\alpha = -1, \beta = 3$ המקדמים של הערך העצמי ולכן שני הפתרונות הם

$$x_1(t) = e^{-t}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\cos(3t) - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\sin(3t)\right) = e^{-t}\begin{pmatrix} 2\cos(3t) - 3\sin(3t) \\ \cos(3t) \end{pmatrix}$$
$$x_2(t) = e^{-t}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\sin(3t) + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\cos(3t)\right) = e^{-t}\begin{pmatrix} 2\sin(3t) + 3\cos(3t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}$$

ולכן הפיתרון הכללי הממשי הוא

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

□

סעיף ג'

יהי $0 \neq x_0$ ונמצא את ערכי $t \in \mathbb{R}$ עבורם הוקטורים $e^{tA}x_0$ ו־x_0 אינם תלויים לינארית.

פתרון: זה שקול לכך שקיים $\lambda \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים $e^{tA}x_0 = \lambda x_0$.
נזכור שמחשבים $e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}$ כאשר P זו המטריצה המלכסנת שמצאנו עם הוקטורים העצמיים מהסעיף הקודם ו־D המטריצה האלכסונית של הערכים העצמיים (כאשר נזכור שאם v וקטור עצמי $u = \overline{v}$ הוא הוקטור העצמי שמתאים במקרה השני), ואז

$$D = \begin{pmatrix} -1+3i & 0 \\ 0 & -1-3i \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2+3i & 2-3i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{6i}\begin{pmatrix} 1 & 3i-2 \\ -1 & 2+3i \end{pmatrix} \Longrightarrow$$
$$e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1} = \begin{pmatrix} 2+3i & 2-3i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{(-1+3i)t} & 0 \\ 0 & e^{(-1-3i)t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3i-2 \\ -1 & 2+3i \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} \cos(3t) + \frac{2}{3}\sin(3t) & -\frac{13}{3}\sin(3t) \\ \frac{1}{3}\sin(3t) & \cos(3t) - \frac{2}{3}\sin(3t) \end{pmatrix}$$

ואכן

$$e^{0A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ונסמן

$$B = \begin{pmatrix} \cos(3t) + \frac{2}{3}\sin(3t) & -\frac{13}{3}\sin(3t) \\ \frac{1}{3}\sin(3t) & \cos(3t) - \frac{2}{3}\sin(3t) \end{pmatrix}$$

אנחנו רוצים

$$e^{tA}x_0 = e^{-t}Bx_0$$

מספיק לבדוק מתי $B(t)x_0 = \lambda x_0$ וזה לכל $x_0 \neq 0$ ולכן צריך ש־$B(t)$ תהיה כפולה של הזהות, כלומר כל האיברים מחוץ לאלכסון צריכים להתאפס ולכן

$$-\frac{13}{3}\sin(3t) = 0 = \frac{1}{3}\sin(3t) \Longrightarrow 3t = k\pi \Longrightarrow t = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

נשאר רק לבדוק את עצמנו שאם $t = \frac{k\pi}{3}$ עבור $k \in \mathbb{Z}$ כלשהו אז

$$\sin(3t) = 0, \quad \cos(3t) = (-1)^k$$

ואז

$$e^{tA} = e^{-t}(-1)^k I$$

ולכן $e^{tA}x_0 = (-1)^k e^{-t}x_0$ תלויים לינארית ומכאן התלות לינארית היא עבור $t = \frac{k\pi}{3}$ עבור $k \in \mathbb{Z}$. □

2.2 שאלה 2

נוכיח את הטענה הבאה מתוך הוכחת משפט היריעה היציבה: תהיי 0 נקודת שיווי משקל היפרבולית עבור שדה וקטורי $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ גזיר ברציפות ונגדיר $A = DF(0)$. נסמן ב־H_+ ובהתאמה H_- את ה־Span הממשי של הוקטורים העצמיים המוכללים של A עם ערכים עצמיים עם חלק ממשי חיובי (בהתאמה שלילי) ותהיינה $\pi_\pm$ ההטלות על־פני הפירוק הישר $\mathbb{R}^n = H_- \oplus H_+$.

יהי $R > 0$ כך שעל הכדור $B(0,R)$ הפונקציה $g(x) = F(x) - Ax$ מקיימת $|g(x)| \leq |x|$ ונוכיח שאם $x : [0,\infty) \to \overline{B(0,R)}$ הוא פיתרון למשוואה $x' = F(x)$ ואם $x_- = p_-(x(0))$ אזי

$$x(t) = e^{tA}x_- + \int_0^t e^{(t-s)A}\pi_-(g(x(s)))\,\mathrm{d}s - \int_t^\infty e^{(t-s)A}\pi_+(g(x(s)))\,\mathrm{d}s$$

הוכחה: נשים לב שמהגדרה

$$F(x) = F(0) + A(x + o(\|x\|)) \underset{F(0)=0}{\Longrightarrow} g(x) = F(x) - Ax = o(\|x\|)$$

בפרט מהגדרת הגבול יש $R > 0$ כך שלכל $x \in B_R(0)$ מתקיים $\|g(x)\| \leq \|x\|$ ונכתוב

$$x(t) = e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}g(x(s))\,\mathrm{d}s$$

נכפול ב־e^{-tA} ונפעיל את π_+ כי הכל לינארי ונקבל

$$e^{-tA}\pi_+x(t) = \pi_+(x(0)) + \int_0^t e^{-sA}\pi_+g(x(s))\,\mathrm{d}s$$

קיים $C > 0$ כך ש־$\left\|\pi_\pm\right\|_{op} \leq C$ כך שאם $0 < \mu < \min\{|Re(\lambda) \mid \text{A למדא ערך עצמי של}|\}$ מתקיים

$$\forall t > 0,\ \left\|e^{-tA}\pi_+x(t)\right\| \leq Ce^{-\mu t}\|x\|$$
$$\forall t < 0,\ \left\|e^{-tA}\pi_+x(t)\right\| \leq Ce^{-|t|\mu}$$

ולכן אם $x(t) \in B_r(0)$ מתקיים

$$\left\|e^{-tA}\pi_+(x(t))\right\| \leq C^2e^{-\mu t}R \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

ולכן לכל $s > 0$ נקבל

$$\left\|e^{-sA}\pi_+g(x(s))\right\| \leq C^2e^{-s\mu}R$$

זה אינטגרבלי ב־s ולכן ניתן ל־t לשאוף לאינסוף ונקבל

$$\pi_+(x(0)) = -\int_0^\infty e^{-=sA}\pi_+g(x(s))\,\mathrm{d}s$$

אז אם נפרק את ההגדרה לעיל של $x(t)$ לפי ה־Span נקבל עם מה שמצאנו לעיל

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{tA}\pi_+(x(0)) + e^{tA}\pi_-(x(0)) + \int_0^t e^{(t-s)A}\pi_+(g(x(s)))\,\mathrm{d}s + \int_0^t e^{(t-s)A}\pi_-(g(x(s)))\,\mathrm{d}s \\ &= e^{tA}\pi_-(x_0) + \int_0^t e^{(t-s)A}\pi_-(g(x(s)))\,\mathrm{d}s - \int_t^\infty e^{(t-s)A}\pi_+(g(x(s)))\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

□

2.3 שאלה 3

יהי $x(t)$ הפיתרון המקסימלי לבעייתל תנאי ההתחלה

$$\begin{cases} x'(t) = x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

ויהי $y(t)$ הפיתרון המקסימלי לבעיית תנאי ההתחלה

$$\begin{cases} y'(t) = y^2 + e^y\sqrt{2+\sin^3(y)} \\ y(t) = 2 \end{cases}$$

סעיף א'

נוכיח שלכל $t > 0$ עבורו $x(t), y(t)$ מוגדרים מתקיים $y(t) > x(t)$.

הוכחה: נניח בשלילה שהטענה לא מתקיימת ונסמן $\tau = \inf\{t \mid y(t) \le x(t)\}$ ומרציפות הפתרונות נובע כי $\overline{x} := x(\tau) = y(\tau)$.

נסמן $f(u) = u^2$ ו־$g(u) = u^2 + e^u\sqrt{2+\sin^3(u)}$ וברור שמתקיים $g(u) > f(u)$ שכן $e^u\sqrt{2+\sin^3(u)} > 0$ ולכן ב־τ מתקיים

$$y'(\tau) = g(y(\tau)) > f(x(\tau)) = x'(t)$$

אז נסתכל על ההפרש $h(t) = y(t) - x(t)$ הוא מקיים

$$h(\tau) = 0, h(t) > 0 \ (t < \tau)$$

ולכן יש מינימום מקומי ב־τ ומתקיים $h'(\tau) \le 0$, מצד שני

$$h'(\tau) = y'(\tau) - x'(\tau) > 0$$

וזאת כמובן סתירה. □

סעיף ב'

נסיק שלבעיית תנאי ההתחלה השנייה לא קיים פתרון לזמן ארוך $y : [0,\infty) \to \mathbb{R}$.

הוכחה: נפתור את המשוואה השנייה לפי שיטת הפרדת משתנים

$$\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \mathrm{d}t \Longrightarrow -\frac{1}{x} = t + C$$

תנאי ההתחלה הוא $x(0) = 1$ ולכן נקבל $C = -1$ כלומר $-\frac{1}{x} = t - 1$ כלומר $x(t) = \frac{1}{1-t}$ והוא מוגדר רק עבור $0 \le t < 1$ ויתר על־כן $\lim_{t\to 1^-} x(t) = \infty$.

אם נניח בשלילה שקיים פתרון לזמן ארוך, $y : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ מהסעיף הקודם לכל $0 < t < 1$ מתקיים

$$y(t) > x(t) = \frac{1}{1-t}$$

ולכן כאשר $t \to 1^-$

$$y(t) \ge x(t)$$

אבל זה פיתרון של משוואה דיפרנציאלית שמוגדר בנקודה $t = 1$ חייב להיות סופי כי $y(1) \in \mathbb{R}$ וזאת סתירה. □

2.4 שאלה 4

סעיף א'

נגיד את מושג השיכוך בסקאלה ε של פונקציה $u \in C(\Omega)$ בנקודה $x_0 \in \Omega$ המקיימת $d(x_0, \partial\Omega) > \varepsilon$.

פתרון: נגדיר $\eta : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ על־ידי $x|_{[0,\frac{1}{2})} = 1$ ו־$\eta(x) = 0$ אחרת.

בהינתן $\varepsilon > 0$ נגדיר את $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ על־ידי

$$\varphi_\varepsilon = \frac{\eta(\|x\|, \varepsilon)}{\varepsilon^n \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\|y\|)\,\mathrm{d}y}$$

φ_ε היא חלקה, רדיאלית, נתמכת על $B(0,\varepsilon)$ ומקיימת $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y$.

נסמן $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ ועבור $u \in C(\Omega)$ נגדיר את השיכוך בסקאלה ε על u להיות

$$u^\varepsilon = \varphi_\varepsilon * u = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y$$

כאשר $u^\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$. □

סעיף ב'

נוכיח את עיקרון המקסימום החזק לפונקציות הרמוניות: יהי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום חסום, פתוח וקשיר ותהיי $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ הרמונית.
אם קיים $x_0 \in \Omega$ כך ש־$u(x_0) = \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x)$ אזי $u(x) = u(x_0)$ לכל $x \in \Omega$.

הוכחה: נסמן $u(x_0) = M$ ונגדיר $A := \{x \in \Omega \mid u(x) = M\}$.
מרציפות u נובע ש־A סגורה ולא ריקה כי $x_0 \in A$ ונשאר רק להראות שהיא פתוחה ומקשירות נסיים.
ואכן, A פתוחה מתכונת ערך הממוצע לפונקציות הרמוניות כמעט באופן ישיר.
יהי $x_0 \in A$, מכך ש־Ω פתוחה יש $r > 0$ כך ש־$\overline{B(x_0, r)} \subseteq \Omega$ ומכך ש־u הרמונית מתקיים

$$M = u(x) = \frac{1}{|\partial B(x_0, r)|} \int_{\partial B(x_0, r)} u \, \mathrm{d}V$$

כאשר M מכיוון ש־$x_0 \in A$.
מצד שני, מהגדרת M נובע כי $u(y) \leq M$ לכל $y \in \overline{\Omega}$ ובפרט לכל $y \in \partial B(x_0, r)$ כלומר יש לנו ממוצע של פונקציה שאינה עוברת את M אבל הממוצע שלה הוא M ולכן בהכרח מתקיים $u(y) = M$ לכל $y \in \partial B(x_0, r)$ ולכן $\partial B(x_0, r) \subseteq A$.
כעת לכל $z \in B(x_0, r)$ נבחר כדור קטן סביב z שמוכל ב־$B(x_0, r)$ ומאותו טיעון נקבל ש־$u(z) = M$ בכל הכדור ולכן נקבל $B(x_0, r) \subseteq A$ ו־A פתוחה.
A פתוחה, סגורה ולא ריקה ו־Ω קשירה ולכן $A = \Omega$. □

2.5 שאלה 5

לא למדנו.

3 מועד ב' 2022

3.1 שאלה 1

נביט במערכת

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & a \end{pmatrix} x$$

כאשר $a \in \mathbb{R}$ פרמטר.

סעיף א'

נוכיח שלכל $a \leftarrow 1$ קיים $x_0 \in \mathbb{R}^2$ כך ש־$\lim_{t\to\infty}\left\|e^{tA}x_0\right\| = \infty$ וגם $\lim_{t\to-\infty}\left\|e^{tA}x_0\right\| = \infty$.

הוכחה: נחשב ערכים עצמיים, עקבה ודטרמיננטה (כי מה עוד יש לעשות)

$$\mathrm{tr}(A) = 1 + a$$

$$\det(A) = 1 \cdot a - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = a + 1$$

נתון לנו ש־$a < -1$, ולכן מתקיים בהכרח $\det(A) < 0$.
אנו יודעים שהדטרמיננטה של מטריצה שווה למכפלת הערכים העצמיים שלה ($\det(A) = \lambda_1\lambda_2$). מכיוון שהמכפלה שלילית, למטריצה יש בהכרח שני ערכים עצמיים ממשיים בעלי סימנים מנוגדים (אחד חיובי ואחד שלילי) ונסמן אותם ב־$\lambda_1 > 0$ ו־$\lambda_2 < 0$.
יהיו v_1, v_2 הווקטורים העצמיים המתאימים להם. כיוון שהם שייכים לערכים עצמיים שונים, הם בלתי־תלויים לינארית ופורשים את $\mathbb{R}^2$.
נבחר את תנאי ההתחלה להיות סכום של שני הווקטורים העצמיים

$$x_0 = v_1 + v_2$$

הפתרון של המערכת עבור תנאי התחלה זה נתון על־ידי

$$x(t) = e^{tA}x_0 = e^{\lambda_1 t}v_1 + e^{\lambda_2 t}v_2$$

נשאר לבדוק

1. כאשר $t \to \infty$ מכיוון ש־$\lambda_1 > 0$, המקדם $e^{\lambda_1 t}$ ישאף לאינסוף. לעומתו, מכיוון ש־$\lambda_2 < 0$, המקדם $e^{\lambda_2 t}$ ישאף לאפס. כיוון ש־$v_1 \neq 0$, הגורם הראשון שולט והנורמה של הפתרון שואפת לאינסוף

$$\lim_{t\to\infty}\left\|e^{tA}x_0\right\| = \infty$$

1. כאשר $t \to -\infty$ ההפך הוא הנכון. החזקה של $e^{\lambda_1 t}$ הולכת למינוס אינסוף ולכן הביטוי שואף לאפס. לעומת זאת, החזקה של $e^{\lambda_2 t}$ היא מכפלה של שני מספרים שליליים (כי $\lambda_2 < 0$ וגם $t < 0$) ולכן שואפת לפלוס אינסוף. במקרה זה הגורם השני שולט, ושוב הנורמה שואפת לאינסוף

$$\lim_{t\to-\infty}\left\|e^{tA}x_0\right\| = \infty$$

□

סעיף ב'

נמצא ערך $a \in \mathbb{R}$ עבורו קיים $x_0 \in \mathbb{R}^2$ כך ש־$e^{tA}x_0$ היא פונקציה לינארית ב־t, כלומר $0 < \lim_{t\to\infty}\frac{\left\|e^{tA}x_0\right\|}{t} < \infty$

3.2 שאלה 2

סעיף א'

ננסח את משפט פיאנו.

הוכחה: תהיי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ו־$F : U \to \mathbb{R}^n$ רציפה ו־$x_0 \in U$. אז יש $\delta > 0$ יש $x : (-\delta, \delta) \to U$ גזירה כך ש־x היא פיתרון לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} x'(t) = F(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

□

סעיף ב'

ננסח ונוכיח את משפט פיקארד.

הוכחה: **ניסוח:** תהיי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ו־$F : U \to \mathbb{R}^n$ ליפשיצית מקומית, $x_0 \in U$. אז יש $\delta > 0$ כך שקיים פיתרון יחיד בקטע $[-\delta, \delta]$ לבעיה

$$\begin{cases} x'(t) = F(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

הוכחה באמצעות למה: משפט פיקארד נובע ממשפט פיאנו יחד עם הלמה הבאה.
למה: בתנאי משפט פיקארד נניח שיש x ו־y פתרונות לבעיה כאשר x מוגדרת על $I \subseteq \mathbb{R}$ ו־y מוגדרת על $J \subseteq I$. אם $x(0) = y(0)$ ו־$0 \in I \cap J$ אזי $x(t) = y(t)$ לכל $t \in I \cap J$.
הוכחת הלמה: נוכיח עבור $I \cap J \cap [0, \infty)$, לפיתרון השני זה זהה.
נניח שלא ככה ונסמן $\tau := \inf\{t \in I \cap J \cap [0, \infty) \mid x(t) \neq y(t)\}$ ומרציפות הפיתרון $\overline{x} = y(\tau) = x(\tau)$.
ניקח $r > 0$ כך ש־$\overline{B(\overline{x}, r)} \subseteq U$ וניקח $\delta > 0$ כך שיתקיים $[\tau, \tau + \delta] \subseteq I \cap J$ וגם לכל $x(t), y(t) \in \overline{B(\overline{x}, r)}$ לכל $t \in [\tau, \tau + \delta]$.
מתקיים

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|x(t) - y(t)\|^2 &= \langle x(t) - y(t), x'(t) - y'(t)\rangle \\ &\langle x(t) - y(t), F(x(t)) - F(y(t))\langle \\ &\leq 2\|x(t) - y(t)\|\|F(x(t)) - F(y(t))\| \\ &\leq 2L\|x(t) - y(t)\|^2\end{aligned}$$

כאשר אי־השיוויונות נובעים מ אי־שיוויון קושי־שוורץ וקבוע ליפשיץ בהתאמה.
אז הפונקציה $f(t) = 2e^{-Lt}\|x(t) - y(t)\|^2$ היא מונוטונית יורדת מהגדרת הנגזרת ואי־שלילית אבל מצד שני מתקיים

$$f(\tau) = 2e^{-L\tau}\|x(\tau) - y(\tau)\| = 0$$

כלומר $f(t) \equiv 0$ לכל t אבל זאת סתירה כי אז $x(t) = y(t)$.
הוכחה באמצעות משפט העתקה מכווצת: מהמשפט היסודי נגדיר

$$x(t) = x_0 + \int_0^t F(x(s))\,\mathrm{d}s$$

ונגדיר

$$Kx = x_0 + \int_0^t F(x(s))\,\mathrm{d}s$$

כעת הבעיה שקולה למציאת נקודת שבת של האופרטור K.
F ליפשיצית מקומית ולכן קיים כדור סגור $B := \overline{B(x_0, r)} \subseteq U$ שבו F חסומה על־ידי M_r וליפשיצית עם קבוע C_r.
נסתכל על המרחב המטרי X מרחב הפונקציות הרציפות מהקטע $(-\delta, \delta)$ אל הכדור B עם נורמת הסופרמום וזה מרחב מטרי שלם אז אם נבחר $\delta \leq \min\left(\frac{r}{2M_r}, \frac{1}{2C_r}\right)$ מתקיים

$$\|Kx(t) - x_0\| \leq \int_0^t \|F(x(s))\|\,\mathrm{d}s \leq \delta M_r \leq \frac{r}{2} < r$$

ולכל שתי פונקציות $x, y \in X$ מתקיים

$$\|Kx(t) - Ky(t)\| \leq \int_0^t \|F(x(s)) - F(y(s))\|\,\mathrm{d}s \leq \int_0^t C_r\|x(s) - y(s)\|\,\mathrm{d}s \leq \delta C_r\|x - y\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|x - y\|_\infty$$

ולכן K היא העתקה מכווצת והמרחב שלם אז ממשפט העתקה מכווצת יש נקודת שבת והיא יחידה, כלומר $Kx = x$ והפיתרון יחיד. □

3.3 שאלה 3

סעיף א'
נגדיר את המושגים נקודת שיווי משקל ונקודת שיווי משקל אסימפטוטית.

הוכחה: נגדיר ש־p היא נקודת שיווי משקל של המערכת אם $F(p) = 0$.
נגיד שהיא נקודת שיווי משקל יציבה אם לכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך שלכל $q \in B(p, \delta)$ מתקיים $\varphi_t(q) \in B(p, \varepsilon)$.
נגיד שהיא נקודת שיווי משקל יציבה אסימפטוטית אם היא גם יציבה וגם קיימת $\eta > 0$ כך שלכל $q \in B(p, \eta)$ מתקיים $\lim_{t\to\infty} \varphi_t(q) = p$. □

סעיף ב'
נמצא את כל נקודות שיווי־המשקל (x_0, y_0) של המערכת

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x(x + y - 3) \\ 2x + y - 1 \end{pmatrix}$$

ונסווג אילו מהן יציבות אסימפטוטית.

פתרון: נחשב

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x(x + y - 3) \\ 2x + y - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

חישוב זריז מניב שהנקודות הן $(0,1)$ ו־$(-2,5)$.
נחשב את $DF(x,y)$

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+y-3 & x \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A := DF(0,1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B := DF(-2,5) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

פולינומים אופיינים

$$P(A) = \det(A-\lambda I) = (-2-\lambda)(1-\lambda) \Longrightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$$

$$P(B) = \det(B-\lambda I) = (-2-\lambda)(1-\lambda)+4 = -2+2\lambda-\lambda+\lambda^2+4 = \lambda^2+\lambda+2 \Longrightarrow \lambda = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-1\pm\sqrt{-7}}{2} = \frac{-1\pm 7i}{2}$$

מהקריטריון הלינארי ליציבות אסימפטוטית צריך שלכל ערך עצמי יש חלק ממשי שלילי ולכן הנקודה $(-2,5)$ היא נקודת שיווי משקל יציבה אסימפטוטית.
עבור $(0,1)$ יש לנו ערך עצמי עם חלק ממשי חיובי ולכן לפי הקריטריון הלינארי לאי־יציבות נובע שזו לא נקודה יציבה. □

סעיף ג'
נסמן ב־φ_t את הזרימה של המערכת מהסעיף הקודם. נוכיח שקיימת נקודה $(x_1y_1) \in \mathbb{R}^2$ שאיננה נקודת שיווי משקל כך ש־$\varphi_t(x_1,y_1)$ קיים לכל $t>0$ והגבול $\lim_{t\to\infty}\varphi_t(x_1,y_1)$ קיים ושווה ל־(x_0,y_0) נקודת שיווי משקל לא יציבה.

הוכחה: נקודת השיווי משקל שלא יציבה היא $(0,1)$ ולכן לפי משפט הקריטריון הלינארי לאי־יציבות (שהוא גם משפט היריעה היציבה) קיימת יריעה יציבה שעוברת דרך $(0,1)$ וכל נקודה עליה מתכנסל ־$(0,1)$ ולכן אפשר לבחור נקודה $(x_1,y_1) \neq (0,1)$ על היריעה שמקיימת את הנדרש. □

3.4 שאלה 4

סעיף א'
נגיד פונקציה תת־הרמונית.
הוכחה: יהי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום. נגיד ש־$u \in C^0(\Omega)$היא תת־הרמונית אם לכל $B \subseteq \Omega$ כדור פתוח כך ש־$\overline{B} \subseteq \Omega$ ולכל $h \in C\left(\overline{B}\right)$ הרמונית ב־B המקיימת $u|_{\partial B} \leq h|_{\partial B}$ מתקיים $u|_B \leq h|_B$. □

סעיף ב'
יהי Ω תחום חסום וקשיר ותהיי $G : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ חסומה. נגדיר מהו פתרון פרון לבעיה

$$\begin{cases} \Delta u = u & \text{on } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

הוכחה:

$$u^{per} := \sup\left\{v \mid v \in C\left(\overline{\Omega}\right) \text{ sub-harmonic}, v|_{\partial\Omega} \leq g|_{\partial\Omega}\right\}$$

□

סעיף ג'
נוכיח שפתרון פרון הוא הרמוני ב־Ω (כלומר, להוכיח את משפט פרון שאני לא זוכרת).

הוכחה: תהיי $y \in \Omega$ ולכן קיימת סדרה $v_n \in S_g$ כך ש־$v_n(y) \to u^{per}(y)$.
מעיקרון המקסימום מתקיים $v_n \leq \sup_{\partial\Omega} g$ ונגדיר $\tilde{v}_n := \max\{v_n, \inf_{\partial\Omega} g\}$ ומתקיים

$$\inf g \leq \tilde{v}_n \leq \sup g, \quad v_n(y) \leq \tilde{v}_n(y) \underset{\tilde{v}_n \in S_g}{\leq} u^{per}(y)$$

ומכלל הכריך נובע ש־$\tilde{v}_n(y) \to u^{per}(y)$ וזו סדרה של פונקציות חסומות ב־S_g.
יהי $B = B(y,r) \subseteq \Omega$ כך ש־$\overline{B} \subseteq \Omega$, נשים לב שההרמה ההרמונית היא תת־הרמונית ולכן $\tilde{v}_n \leq V_n$ ולכן $V_n \in S_g$ ונקבל את שרשרת אי־השיוויונות $\tilde{v}_n \leq V_n \leq u^{per}$ ולכן בנקודה y נקבל $V_n(y) \to u^{per}(y)$.
אז $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה חסומה של פונקציות הרמוניות בכדור B ומטענה שראינו לסדרת פונקציות הרמוניות חסומות קיימת תת־סדרה שמתכנסת לפונקציה תת־הרמונית, אז תת־סדרה V_{n_k} שמתכנסת ב־B לפונקציה הרמונית h_v כך שמתקיים $V_{n_k} \to h_v$ נקודתית ומיחידות הגבול $V_{n_k}(y) \to u^{per}(y)$ וכן $V_{n_k}(y) \to h_v(y)$.
נרצה להראות שזה מתקיים לכל נקודה ב־B: כבר ידוע $h_v \leq u^{per}$ ב־B ולכן נשאר להראות את האי־שיוויון השני; נניח בשלילה שקיימת $z \in B$ עבורה $h_v(z) < u^{per}(z)$.
תהיי $w_k \in S_g$ כך ש־$w_k \geq V_{n_k}$ ו־$w_k(z) \to u^{per}(z)$.
מהגדרת sup נקבל שקיימת סדרה $\hat{w}_k \in S_g$ המקיימת את התנאי השני ונחליף $w_k := \max\left\{\hat{w}_k, V_{n_k}\right\} \in S_g$ ומתקיים $V_{n_k} \leq w_k \leq u^{per}$ ובפרט $w_k(z) \to u^{per}(z)$ וכן $w_k(y) \to u^{per}(y)$.
ושוב עם ההרמה ההרמונית, $W_k \in S_g$ ומתקיים $V_{n_k} \leq w_k \leq W_k \leq u^{per}$ ונוכל למצוא תת־סדרה מתכנסת W_{k_n} ב־B לפונקציה הרמונית h_w ומתקיים

$$h_v \leq h_w, \quad h_v(y) = h_w(y) = u^{per}(y), \quad h_v(z) < h_w(z) = u^{per}(z)$$

לכן הפונקציה $h_v - h_w \leq 0$ היא פונקציה הרמונית שאינה קבועה ומקבלת מקסימום 0 בנקודה פנימית y בסתירה לעקרון המקסימום ולכן $h_v \equiv u^{per}$ ב־B.
משרירותיות B, y נקבל ש־u^{per} הרמונית ב־Ω. □

3.5 שאלה 5

לא למדנו.

4 מועד א' 2024

4.1 שאלה 1

תהיי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ו־$F : U \to \mathbb{R}^n$ פונקציה ליפשיצית מקומית. יהיו $I, J \subseteq \mathbb{R}$ קטעים פתוחים כך ש־$0 \in I \cap J$ ויהיו $x : I \to U$, $y : J \to U$ שני פתרונות למשוואה $x'(t) = F(x(t))$ כך שמתקיים $x(0) = y(0)$. נראה שלכל $t \in I \cap J$ מתקיים $x(t) = y(t)$.

הוכחה: זו הלמה שמוכיחים איתה את משפט פיקארד.
נניח שלא ככה ונסמן $\tau := \in \{t \in I \cap J \cap [0, \infty) \mid x(t) \neq y(t)\}$ ומרציפות הפתרונות כמובן שמתקיים $\overline{x} := y(\tau) = x(\tau)$.
יהי $r > 0$ כך שמתקיים $\overline{B(\overline{x}, r)} \subseteq U$ ותהיי $\delta > 0$ כך שמתקיים $[\tau, \tau + \delta] \subseteq \overline{B(\overline{x}, r)}$ וגם לכל $t \in [\tau, \tau + \delta]$ מתקיים $x(t), y(t) \in \overline{B(\overline{x}, r)}$.
מאי־שיוויון קושי־שוורץ ומהליפשיציות מתקיים

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|x(t) - y(t)\|^2 &= 2\langle x(t) - y(t), x'(t) - y'(t)\rangle \\
&= \langle x(t) - y(t), F(x(t)) - F(y(t))\rangle \\
&\leq 2\|x(t) - y(t)\|\|F(x(t)) - F(x(y))\| \\
&\leq 2L\|x(t) - y(t)\|^2
\end{aligned}$$

כלומר הפונקציה $f(t) = 2e^{-Lt}\|x(t) - y(t)\|^2$ היא פונקציה מונוטונית יורדת מגזירה

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \leq -2Lf(t) + 2fL(t) = 0$$

ומתקיים $f(\tau) = 0$ ולכן בהכרח $f(t) \equiv 0$ לכל $t \in [\tau, \tau + \delta]$ אבל זה אומר שבקטע הזה $x(t) - y(t) = 0$ וזאת סתירה. □

4.2 שאלה 2

יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע פתוח ותהיי $A : I \to M_n(\mathbb{R})$ פונקציה רציפה.
מטריצת הפתרונות היסודית של המשוואה

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(t)x(t)$$

היא פונקציה $\Phi : I \to M_n(\mathbb{R})$ שעמודתיה הם פתרונות בלתי־תלויים של המשוואה.
נראה שאם Φ היא מטריצת פתרונות יסודית אז מתקיים

$$\frac{\mathrm{d}\det\Phi(t)}{\mathrm{d}t} = \operatorname{tr} A(t) \det\Phi(t)$$

רמז: להראות שלכל $B \in M_n(\mathbb{R})$ מתקיים $\det(\mathrm{Id} + hB) = 1 + h\operatorname{tr} B + o(h)$.

הוכחה: ראשית הנדרש נובע ישירות מהרמז: לפי הגדרת הנגזרת

$$\frac{\mathrm{d}\det\Phi(t)}{\mathrm{d}t} = \lim_{h\to 0}\frac{\det\Phi(t+h) - \det\Phi(t)}{h}$$

מכיוון ש־Φ פותרת את המשוואה, הנגזרת שלה היא $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ ומפיתוח טיילור

$$\begin{aligned}
\Phi(t+h) &= \Phi(t) + h\Phi'(t) + o(h) \\
&= \Phi(t) + hA(t)\Phi(t) + o(h) \\
&= (\mathrm{Id} + hA(t))\Phi(t) + o(h)
\end{aligned}$$

דטרמיננטה היא פולינום ולכן פונקציה חלקה ולכן איבר השארית נשאר קטן ומכפליות הדטרמיננטה נקבל

$$\det\Phi(t+h) = \det(\mathrm{Id} + hA(t)) \cdot \det\Phi(t) + o(h)$$

ומהרמז אם $B = A(t)$ נקבל

$$\det\Phi(t+h) = (1 + h\operatorname{tr}(A(t)) + o(h)) \cdot \det\Phi(t) + o(h) = \det\Phi(t) + h\operatorname{tr}(A(t))\det\Phi(t) + o(h)$$

ונקבל

$$\frac{\det\Phi(t+h) - \det\Phi(t)}{h} = \operatorname{tr}(A(t))\det\Phi(t) + \frac{o(h)}{h}$$

מאריתמטיקה של גבול $\frac{o(h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ ונקבל

$$\frac{\mathrm{d}\det\Phi(t)}{\mathrm{d}t} = \operatorname{tr}(A(t))\det\Phi(t)$$

אז רק נשאר להראות את הרמז.
נניח כי $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ הם הערכים העצמיים של המטריצה B (מעל $\mathbb{C}$, כולל ריבוי אלגברי).
נשתמש בשלוש עובדות מוכרות מהאלגברה הלינארית

1. הערכים העצמיים של המטריצה $\mathrm{Id} + hB$ הם בדיוק $1 + h\lambda_i$ לכל $i = 1, ..., n$.
2. הדטרמיננטה של מטריצה שווה למכפלת כל הערכים העצמיים שלה.
3. העקבה (tr) של מטריצה שווה לסכום כל הערכים העצמיים שלה, כלומר $\operatorname{tr} B = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

לכן, ניתן לחשב את הדטרמיננטה ישירות כמכפלת הערכים העצמיים

$$\det(\mathrm{Id} + hB) = \prod_{i=1}^{n}(1 + h\lambda_i)$$

כעת, נפתח את המכפלה (בדומה לפתיחת סוגריים בפולינום):

1. האיבר החופשי מתקבל מהכפלת כל ה־1־ים יחד, והוא שווה ל־1.
2. האיבר שמוכפל ב־h בחזקת 1 מתקבל מכל הפעמים שבחרנו $h\lambda_i$ מסוגריים אחד, ו־1 מכל שאר הסוגריים. לכן, המקדם של h הוא בדיוק סכום הערכים העצמיים:

$$1 + h(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n) + O(h^2)$$

1. כל שאר המחוברים בפיתוח יכילו לפחות הכפלה של שני גורמי h (כלומר h^2, h^3 וכו'), ולכן כולם יחד נבלעים ב־$o(h)$ כאשר $h \to 0$.

נציב את סכום הערכים העצמיים במקום העקבה, ונקבל מיד

$$\det(\mathrm{Id} + hB) = 1 + h \operatorname{tr} B + o(h)$$

□

4.3 שאלה 3

תהיי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ו־$F : U \to \mathbb{R}^n$ פונקציה גזירה ברציפות.

4.4 סעיף א'

נגדיר נקודת שיווי משקל יציבה אסימפטוטית של F.

הוכחה: נגיד ש־p היא נקודת שיווי משקל של F אם מתקיים $F(p) = 0$.
נגיד שהיא נקודת שיווי משקל יציבה אם לכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך שאם $q \in B(p, \delta)$ אזי $\varphi_t(q) \in B(p, \varepsilon)$.
נגיד שהיא נקודת שיווי משקל יציבה אסימפטוטית אם היא נקודת משקל יציבה ויש $\eta > 0$ כך שלכל $q \in B(p, \eta)$ מתקיים $\lim_{t\to\infty} \varphi_t(q) = p$. □

4.5 סעיף ב'

תהיי $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ הפונקציה

$$F(x_1, x_2) = (x_2^3, -x_1)$$

ונתבונן במערכת

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F(x(t))$$

נוכיח כי הערך של הפונקציה $H(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^4}{4}$ נשמר לאורך מסלולי הזרימה של המערכת ונמצא את נקודות שיווי המשקל של המערכת ונקבע האם הן יציבות אסימפטוטית או לא יציבות.

הוכחה: מכלל השרשרת

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(x(t)) = \langle \nabla H(x(t)), x'(t) \rangle$$

כאשר

$$\nabla H = (x_1, x_2^3)$$

ולכן

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(x(t)) = \langle (x_1, x_2^3), (x_2^3, -x_1) \rangle = 0$$

ולכן H קבוע לאורך כל המסלול של המערכת.
נקודות שיווי משקל היא פשוט $(x_1, x_2) = (0, 0)$ אז נשאר רק לסווגה.
לא ניתן להשתמש במבחן היעקוביאן כי $DF|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ואז הערך העצמי הוא ערך אפס.
מצד שני, H זו פונקציית ליאפונוב ולכן היא יציבה. אבל אין לנו עדיין וודאות על יציבות אסימפטוטית.
נניח בשלילה שזאת כן יציבות אסימפטוטית ולכן יש מסלול שמתחיל בנקודה $q \neq (0, 0)$ שמתכנס לראשית.
מרציפות H נקבל

$$H(\varphi_t(q)) \to H(0,0) = 0$$

מצד שני

$$H(\varphi_t(q)) = H(q) > 0$$

לכל t וזאת סתירה ולכן הנקודה יציבה אך לא יציבה אסימפטוטית. $\square$

4.6 שאלה 4

אני לא למדתי שטורם־ליוביל.

4.7 שאלה 5

לא בחומר.

5 מועד ב' 2024

5.1 שאלה 1

תהיי $a:[0,b)\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה וניח כי $u:[0,b)\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה כך שלכל $t\in[0,b)$ מתקיים

$$u'(t)\le a(t)u(t)$$

נוכיח כי לכל $t\in[0,b)$ מתקיים

$$u(t)\le u(0)\exp\left(\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

הוכחה: נגדיר $v(t)=e^{\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s}$ ונראה שהיא פותרת את הבעיה

$$\begin{cases} v'(t)=a(t)v(t)\\ v(0)=1\end{cases}$$

ואכן, $g(t)=\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s$ ומכלל שרשרת

$$v'(t)=e^{g(t)}g'(t)=e^{g(t)}\cdot a(t)=a(t)v(t)$$

ואכן מתקיים

$$v(0)=e^{\int_0^0 a(s)\,\mathrm{d}s}=e^0=1$$

נסתכל על $w(t)=\frac{u(t)}{v(t)}$, מתקיים

$$w'(t)=\frac{u'(t)v(t)-v'(t)u(t)}{v(t)^2}=\frac{v(t)(u'(t)-u(t))}{a(t)v(t)^2}=\frac{u'(t)-a(t)u(t)}{v(t)}$$

נתון $u'(t)\le a(t)u(t)$ ולכן $w(t)\le 0$ וזו פונקציה מונוטונית יורדת, מתקיים

$$w(0)=\frac{w(0)}{v(0)}=\frac{u(0)}{1}=u(0)$$

כלומר $w(t)<=u(0)$ כלומר $u(t)\le u(0)v(t)$, כנדרש. □

5.2 שאלה 2

נתונה המערכת הלינארית

$$x'(t)=\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}x(t)+v$$

היכן ש־$v\in\mathbb{R}^2$ וקטור קבוע.

סעיף א'

באמצעות וריאציה של קבועים נכתוב נוסחה סגורה לפיתרון המשוואה עם תנאי התחלה $x_0\in\mathbb{R}^2$ ונוכיח שהנוסחה אכן מתארת את הפיתרון.

פתרון: נסמן $A=\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$ ונחשב פולינום אופייני

$$P(A)=\det(A-\lambda I)=\begin{bmatrix}-2-\lambda&1\\1&-2-\lambda\end{bmatrix}=(-2-\lambda)(-2-\lambda)-1=4+4\lambda+\lambda^2-1=\lambda^2+4\lambda+3=(\lambda+3)(\lambda+1)$$

אז ערכים עצמיים הם $\lambda_1=-1,\lambda_2=-3$ ונמצא וקטורים עצמיים מתאימים

$$\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0\iff\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0\iff\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

ולכן המטריצות שלנו הן

$$D=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-3\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix},\quad P^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

נחשב

$$e^{tA} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-t}+e^{-3t} & e^{-t}-e^{-3t} \\ e^{-t}-e^{-3t} & e^{-t}+e^{-3t} \end{pmatrix}$$

לפי עיקרון דומהל עבור $x(0) = x_0$ נקבל שמטריצת הפתרונות היסודית ניתנת על־ידי $\pi(t) = e^{tA}$ ומתקיים

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}g(s)\,\mathrm{d}s$$

במקרה שלנו $g(s) = v$ וקטור קבוע ולכן ניתן לחשב את האינטגרל מימין

$$\int_0^t e^{(t-s)A}v\,\mathrm{d}s = \left(\int_0^t e^{(t-s)A}\,\mathrm{d}s\right)v = \left(\int_0^t e^{uA}\,\mathrm{d}u\right)v = A^{-1}\big(e^{tA} - \mathrm{Id}\big)v$$

כאשר

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

ולכן המועמדת לנוסחה סגורה היא

$$x(t) = e^{tA}x_0 + A^{-1}\big(e^{tA} - \mathrm{Id}\big)v$$

נשאר רק לבדוק ואכן

$$x(0) = e^{t0}x_0 + A^{-1}(e^{t0} - \mathrm{Id})v = x_0$$

וגם

$$x'(t) = Ae^{tA}x_0 + A^{-1}Ae^{tA}v = Ae^{tA}x_0 + e^{tA}v$$

כעת נציב $Ax(t) + v$ ונקבל

$$Ax(t) + v = Ae^{tA}x_0 + AA^{-1}\big(e^{tA} - \mathrm{Id}\big)v + v = Ae^{tA}x_0 + \big(e^{tA} - \mathrm{Id}\big)v + v = Ae^{tA}x_0 + e^{tA}v$$

ולכן זה אכן הפיתרון. □

סעיף ב'

נראה שלכל $x_0 \in \mathbb{R}^2$ הפיתרון למשוואה $x(0) = x_0$ מקיים

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = v$$

הוכחה: אני לא מבינה מה רוצים ממני והג'מיני אומר שיש טעות בשאלה וזה אמור להתכנס לנקודת שיוי המשקל, זה גם מסתדר עם טענה שראינו: שני הערכים העצמיים של A הם עם חלק ממשי שלילי ולכן לפי טענה שראינו

$$e^{tA} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

ולכן

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} e^{tA}(x_0 + A^{-1}v) - A^{-1}v = -A^{-1}v$$

וזאת נקודת שיווי משקל שכן אם נסמן $p = -A^{-1}v$ נקבל

$$Ap + v = 0$$

□

5.3 שאלה 3

תהיי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ו־$F : U \to \mathbb{R}^n$ פונקציה ליפשיצית מקומית.

סעיף א'

נגדיר נקודת שיווי משקל יציבה של המערכת.

הוכחה: נגיד ש־p היא נקודת שיווי משקל של המערכת אם $F(x) = 0$.

נגיד ש־p נקודת שיווי משקל אם לכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך שאם $q \in B(p,\delta)$ אזי $\varphi_t(q) \in B(p,\varepsilon)$. □

סעיף ב'

תהיי $x_0 \in U$ כך ש־$F(x_0) = 0$ ונניח שכל הערכים העצמיים של $DF(x_0)$ הם בעלי חלק ממשי שלילי. נראה ש־x_0 נקודת שיווי משקל יציבה.

הוכחה: בעצם אנחנו מתבקשים להוכיח את הקריטריון הלינארי ליציבות אסימפטוטית בלי השורה האחרונה שגם אותו אני עדיין לא זוכרת.

כזכור לכל $t \in J_p^*$, $\varphi_t(x)$ גזירה ב־p ו־$M = D\varphi_t(p)$ מקיימת

$$(\star)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[D\varphi_t(p)] = DF(\varphi_t(p))D\varphi_t(p), \quad D\varphi_0(p) = \mathrm{Id}$$

אבל p נקודת שיווי משקל כלומר $F(p) = 0$ ולכן $\varphi_t(p) = p$ לכל t ומכאן נובע ש־$(\star)$ היא משוואה לינארית במקדמים קבועים ולכן $M' = DF(p)M$ ולכן

$$D\varphi_t(p) = \exp(tDF(p))$$

בפרט מלמה שראינו נובע ש־$\|\exp(tDF(p))\|_{op} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ ולכן יש $T > 0$ שעבורו

$$\|\exp(TDF(p))\|_{op} < \frac{1}{4}$$

יהי $\varepsilon > 0$ וקיימת $\delta > 0$ כך שלכל $q \in B_\delta(p)$ ולכל $t \in [0,T]$ מתקיים $\varphi_t(q) \in B_\varepsilon(p)$ (מתלות רציפה בתנאי ההתחלה). בנוסף מהקירוב הלינארי

$$\varphi_T(q) = \varphi_T(p) + D\varphi_T(p)(q-p) + o(\|q-p\|)$$

ולכן על־ידי הקטנה של δ אם צריך נוכל להניח שהמחובר $o(p-q)$ לא עולה על $\frac{1}{4}\|p-q\|_{op}$, כלומר $\|\varphi_T(q) - \varphi_T(p)\|_{op} \le \frac{\|q-p\|_{op}}{2}$.
בפרט $\varphi_T(q) \in B_\delta(p)$ שכן $\varphi_T(p) = p$ ושוב לכל $0 \le t \le T$ מתקיים $\varphi_{T+t}(q) \in B_\varepsilon(p)$ (שוב מהרציפות בתנאי ההתחלה) ואם נחזור על התהליך נקבל

$$\|\varphi_{kT}(q) - p\|_{op} \le 2^{-k}\|q-p\|$$

לכל $t \in [0,T]$ ולכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $\varphi_{kT+t}(q) \in B_\varepsilon(p)$ כלומר לכל $t > 0$ מתקיים $\varphi_t(q) \in B_\varepsilon(p)$ וזו בידיוק ההגדרה של יציבות. □

5.4 שאלה 4

אני לא יודעת שטורם־ליוביל.

5.5 שאלה 5

נראה שאם $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ו־$f : U \to \mathbb{R}$ רציפה ומקיימת את תכונת ערך הממוצע ב־U אז f חלקה.

הוכחה: לכל $\varepsilon > 0$ נגדיר $U_\varepsilon := \{x \in U \mid \mathrm{dist}(x, \partial U > \varepsilon)\}$.
נגדיר $\eta : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ על־ידי $\eta|_{[0,\frac{1}{2})} = 1$ ו־$\eta(x) = 0$ אחרת.
נגדיר $\varphi_\varepsilon : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ על־ידי

$$\varphi_\varepsilon(y) = \frac{\eta\left(\frac{\|x\|}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon^n \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\|z\|)\,\mathrm{d}z}$$

עבור f הנתונה נגדיר את השיכוך של f ביחס לסקאלה ε על־ידי

$$f^\varepsilon = \varphi_\varepsilon * f = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

ולכן מספיק להראות שלכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $f|_{U_\varepsilon} = u^\varepsilon$ ואז עבור $x \in U_\varepsilon$ מתקיים

$$\begin{aligned}
f^\varepsilon(x) &= \int_{B(x,r)} \varphi_\varepsilon(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^n} \eta(\|z\|)\,\mathrm{d}z} \int_0^\varepsilon \frac{\eta(r,\varepsilon)}{\varepsilon^n} \int_{\partial B(x,r)} f(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^n} \eta(\|z\|)\,\mathrm{d}z} \int_0^\varepsilon \frac{\eta(r,\varepsilon)}{\varepsilon^n} \int_{\partial B(x,r)} f(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}r \\
&= f(x) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\,\mathrm{d}y \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

שכן f מקיימת את תכונת ערך הממוצע ו־φ_ε חלקה והאינטגרל שלה על כל המרחב מנורמל. □